Diferencne jednačine

Ana Manojlović **Marko Mladenović** **Sandra Hodžić**

Uvod

Aritmetički i geometrijski niz su primeri nizova zadatih rekurentnim vezama. Oba niza su odredjena ponavljanjem prvog člana u neke veze izmedju dva uzastopna člana. U aritmetičkom nizu to je veza oblika :

$$a_{n+1} = a_n + d, \quad n \in N \tag{1}$$

a kod geometrijskog :

$$a_{n+1} = qa_n, \quad q \neq 0, \, n \in N \tag{2}$$

U opštem slučaju, niz a_n odredjen je poznavanjem prvog člana i jednačinom oblika

$$a_{n+1} = f(a_n) \tag{3}$$

Ove tri jednačine su primeri diferencnih jednačina prvog reda i ona se piše u opštem obliku :

$$F(n, a_n, a_{n+1}) = 0 \tag{4}$$

A diferencne drugog reda imaju oblik:

$$F(n, a_n, a_{n+1}, a_{n+2}) = 0 \tag{5}$$

Analogno, diferencna jednačina k-tog reda data je sa :

$$F(n, a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{n+k}) = 0 \tag{6}$$

Diferencne jednačine su one jednačine u kojima je nepoznata niz, a rešiti takvu jednačinu znači odrediti sve nizove a_n čiji članovi zadovoljavaju tu jednakost. One, po pravilu, imaju beskonačno mnogo rešenja pa da bi se potpuno odredio niz, pored zahteva da zadovoljava tu jednakost, potrebno je zadati prvi član, ili nekoliko članova, u zavisnosti kojeg je reda diferencna jednačina.

Linearne diferencne jednačine prvog reda

To su jednačine oblika:

$$a_{n+1} = qa_n + \phi(n), \quad q \neq 0 \tag{7}$$

gde je $\phi(n)$ funkcija prirodnog broja n.

Jednačina (1) ima rešenje u opštem obliku koje se, najkraće, dobija na sledeći način.
$a_n = a_1 + (n-1)d$ - opšti član aritmetičkog niza
$a_n = a_1 + nd - d$
$a_n = (a_1 - d) + nd$, pri čemu je $a_1 - d$ neka proizvoljna konstanta C, ako prvi član nije poznat.

Jednačina (2) ima ovakvo rešenje:
$a_n = a_1 q^{n-1}$ - opšti član geometrijskog niza
$a_n = a_1 q^{-1} q^n$
$a_n = \frac{a_1}{q} q^n$, gde je $\frac{a_1}{q}$ proizvoljna konstanta C ako je prvi član a_1 nije poznat. Ovaj postupak naziva se **nadovezivanje jednačina**.

Teorema 1 Ako je ${a_n}' = Cq^n$ opšte rešenje (2) a ako je ${a_n}''$ proizvoljno rešenje (7), onda su sva rešenja jednačine (7) oblika

$$a_n = {a_n}' + {a_n}'' \tag{8}$$

Prvo proverimo da je svaki niz oblika (8) rešenje za (7)

$$a_{n+1} = {a_{n+1}}' + {a_{n+1}}'' = q{a_n}' + q{a_n}'' + \phi(n) = q({a_n}' + {a_n}'') + \phi(n) = qa_n + \phi(n)$$

Obratno, svako rešenje jednačine (7), tj. svaki niz a_n za koji važi (7),a kome je prvi član proizvoljan broj a_1, može se prikazati u obliku (8) za pogodno odabranu vrednost konstante C.

Dakle, za datu diferencnu jednačinu prvog reda treba naći bar jedno njeno rešenje ${a_n}''$. Ne postoji opšti postupak koji to omogućava, ali za neke jednostavnije funkcije $\phi(n)$ takvo rešenje se traži baš u obliku koji je sličan obliku funkcije $\phi(n)$. Ako je npr. $\phi(n)$ polinom prvog stepena, pokušaćemo da nadjemo rešenje u obliku polinoma prvog stepena (tj. drugog ako ga već nismo našli).

Primer 1 Rešiti diferencnu jednačinu $x_{n+1} = x_n + 2n - 2, x_0 = 2$.
Ovde je $q = 1$, $\phi(n)$ je polinom prvog stepena : $2n + 2$. Lako se proveri da ne postoji rešenje oblika $x_n = \alpha n + \beta$. Zato ga tražimo u obliku polinoma drugog stepena:

$$x_n = \alpha n^2 + \beta n + \gamma$$

$$\alpha(n+1)^2 + \beta(n+1) + \gamma = \alpha n^2 + \beta n + \gamma + 2n - 2$$

$$\alpha n^2 + 2n\alpha + \alpha + \beta n + \beta + \gamma = \alpha n^2 + \beta n + \gamma + 2n - 2$$

$$2n\alpha + \alpha + \beta = 2n - 2$$

$$2\alpha = 2$$
$$\alpha + \beta = -2$$
$$\alpha = 1 \quad \beta = -3$$

pošto je γ proizvoljan broj, recimo $\gamma = 0$ sledi da je traženi niz

$$x_n{}'' = n^2 - 3n$$

Po teoremi 1, rešenje diferencne jednačine je $x_n = 1^n C + n^2 - 3n$ tj. $x_n = n^2 - 3n + C$. Iz uslova da je $x_0 = 2$ imamo :
$2 = 0 - 0 + C, \quad C = 2$, pa je rešenje niz $\underline{x_n = n^2 - 3n + 2}$.

Linearne diferencne jednačine drugog reda

Posmatramo homogenu diferencnu jednačinu drugog reda gde nemamo $\phi(n)$.

$$a_{n+2} = p\, a_{n+1} + q a_n, \quad p, q \in \mathbb{R} \tag{9}$$

Teorema 2 Neka su x_n i y_n proizvoljna dva rešenja diferencnih jednačina drugog reda, a C_1 i C_2 proizvoljne konstante. Tada je niz

$$a_n = C_1 x_n + C_2 y_n \tag{10}$$

takodje rešenje.
Diferencnim jednačinama drugog redapridružuju se tzv. karakteristična kva-dratna jednačina:

$$t^2 = pt + q \tag{11}$$

Teorema 3 (i) Ako su t_1 i t_2 rešenja karakteristične jednačine (11) različita tada su odredjena 2 rešenja diferencnih jednačina sa

$$x_n = t_1{}^n, \quad y_n = t_2{}^n \tag{12}$$

pa (10) postaje $a_n = C_1 t_1{}^n + C_2 t_2{}^n$.

(ii) Ako je t_1 dvostruko rešenje (11) tada su nizovi x_n i y_n dati sa

$$x_n = t_1{}^n, \quad y_n = n t_1{}^n \tag{13}$$

pa (10) postaje $a_n = (C_1 + nC_2) t_1{}^n$.

Dokaz: (i) Da su x_n i y_n rešenja jednačine (9) proverava se neposredno

$$x_{n+2} = {t_1}^{n+2} = {t_1}^n {t_1}^2 = {t_1}^n(p\,t_1 + q) = p\,{t_1}^{n+1} + q{t_1}^n = p\,x_{n+1} + qx_n$$
$$y_{n+2} = {t_2}^{n+2} = {t_2}^n {t_2}^2 = {t_2}^n(p\,t_2 + q) = p\,{t_2}^{n+1} + q{t_2}^n = p\,y_{n+1} + qy_n$$

(ii) proverimo da li je $y_n = n{t_1}^n$ rešenje jednačine (9)

$$y_{n+2} = (n+2){t_1}^{n+2} = n{t_1}^{n+2} + 2{t_1}^{n+2} = n{t_1}^n\,{t_1}^2 + 2{t_1}^2{t_1}^n =$$

$$= n{t_1}^n(p\,t_1 + q) + p\,t_1\,{t_1}^n = np\,{t_1}^{n+1} + qn{t_1}^{n+1} + p\,{t_1}^{n+1}(n+1) + qn{t_1}^n = p\,y_{n+1} + qy_n$$

Ovde smo iskoristili Vietovo pravilo $2t_1 = p$.

Primer 2 Odrediti eksplicitan izraz za Fibonačijeve brojeve (Fibonačijev niz je niz kod koga je svaki član jednak zbiru prethodna dva, počevši od trećeg) $1, 1, 2, 3, 5, \ldots$ (uslov: $x_1 = 1,\ x_2 = 1$).

Jednačini: $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$ pridružujemo karakterističnu kvadratnu jednačinu:

$$t^2 = t + 1$$
$$t^2 - t - 1 = 0$$

rešenja su $t_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ i $t_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. A, prema teoremi 3, slučaj (i) (jer smo dobili dva različita rešenja $t_1 \neq t_2$) imamo sledeće:

$$x_n = C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Iz prethodnih $x_1 = x_2 = 1$ sledi

$$1 = C_1\,\frac{1+\sqrt{5}}{2} + C_2\frac{1-\sqrt{5}}{2}$$
$$1 = C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2$$

Rešenje ovog sistema je $C_1 = \frac{1}{\sqrt{5}},\ C_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ pa konačno dobijamo da je n-ti fibonačijev broj

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

Primena diferencnih jednačina u teoriji sistema

Diferencene jednačine imaju smisao diskretnih sistema. Diskretan sistem je, grubo govoreći, uredjaj, proces ili algoritam koji obradjuje i generiše diskretne signale koji predstavljaju sekvence tj. nizove brojeva.
Najbolji primer diskretnog sistema je računar koji na logičkom nivou operiše nad nizovima čiji su članovi nule i jedinice. Od posebnog značaja su linearni, vremenski nepromenljivi sistemi (*Linear Time Invariant, LTI*) koji se opisuju linearnim diferencenim jednačinama sa konstantnim koeficijentima.
Opšta jednačina takvog sistema je:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k y_{n-k} = \sum_{k=0}^{m} b_k x_{n-k}$$

koja je validna za sistem N-tog reda.
Niz x_n je ulazni signal sistema, a niz y_n je izlazni signal.
Ovakva predstava sistema ima prednost u primenama metoda identifikacije procesa (odredjivane parametara a_k i b_k); matematičkom modelovanju sistema, filtracije šuma, analizi signala, itd.

Ideja za rešavanje diferencne jednačine oblika $x_{n+1} = \alpha x_n$, gde je α konstanta, zove se "nadovezivanje". Pretpostavimo da je x_0 poznato. Onda je $x_1 = \alpha x_0$. Zatim, $x_2 = \alpha x_1$ a pošto znamo x_1 biće $x_2 = \alpha \alpha x_0$. Nastavljajući ovako zaključujemo da je opšte rešenje za $x_{n+1} = \alpha x_n$ (gde je α konstanta)

$$x_n = \alpha^n x_0$$

Primer diferencnih jednačina u biologiji

Ako je x_n veličina populacije, onda je $x_{n+1} - x_n$ promena populacije od trenutka n do trenutka $n+1$. Često se u biologiji diferencne jednačine ovako konstruišu.

Neka je populacija bakterija n sati od početka eksperimenta $x_n mg$. Pretpostavimo da je na početku bilo $4,3mg$ bakterija i da je promena populacije na svaki sat

$$x_{n+1} - x_n = 0,25x_n$$

(a) Naći formulu za broj bakterija u mg u satu n
(b) Zaokruži rezultat X_{25} na ceo broj

(a) Problem može da se napiše kao sledeća deferencna jednačina:
$x_{n+1} = x_n + 0,25x_n = 1,25x_n$. Ovde je $\alpha = 1,25$, a $x_1 = 4,3$

Rešenje je $x_n = (1,25)^n \, 4,3$

(b) $x_{25} = 1,25^{25} \, 4,3 = 1138mg$

Vremenske serije

Vremenske serije su sekvence slučajnih promenljivih (X_t) koje predstavljaju merenje odredjene veličine tokom vremena. U praksi, vremenske serije su zapisi vrednosti odredjene veličine koja je od značaja, uzeta u različitim vremenskim trenucima. Pošto se podaci uzorkuju u podjednako odvojenim vremenskim trenucima, oni postaju vremenske serije u diskretnom vremenu. Ukoliko su podaci rezultat kontinualnog (stohastičkog) procesa, onda se radi o vremenskoj seriji u kontinualnom vremenu.

Osnovni cilj analize vremenskih serija je naći dinamičku, zavisnost X_t u funkciji njenih prethodnih vrednosti (X_{t-1}, X_{t-2} ...). Da bi se ta zavisnost što preciznije opisala, potrebno je poznavati sledeći operator.

"**Operator kašnjenja**", $B(L)$ (*Backshift or Lag operator*)

On se definiše kao

$$BX_t = X_{t-1} \tag{14}$$

Drugim rečima, BX_t je vrednost vremenske serije u trenutku $t-1$. Može se formirati i polinom

$$\Phi(B) = \Phi_0 - \Phi_1 B - \Phi_2 B^2 - \cdots - \Phi_p B^p = \Phi_0 - \sum_{i=1}^{p} \Phi_i B^i \tag{15}$$

gde je $\Phi_0 = 1$, a p nenegativan ceo broj koji govori kog je reda $\Phi(B)$. Vraćajući ovaj operator u (14) dobijamo

$$\Phi(B)\, X_t = X_t - \sum_{i=1}^{p} \Phi_i X_{t-i} \tag{16}$$

Jednačina (16) u analizi vremenskih serija opisuje zavisnost X_t od svojih prethodnih vrednosti.

Jednačina

$$\Phi(B)X_t = c \tag{17}$$

gde je c konstanta, naziva se "*diferencna jednačina reda p*". Ako je $c = 0$, jednačina je homogena. Promenljiva X_t koja zadovoljava (17) je njeno rešenje.

ARMA model (*Autoregressive-Moving-Average*)

Najopštiji model vremenskih serija je ARMA model. On podrazumeva da na svom ulazu ima sekvencu najslučajnijih vrednosti. Takva sekvenca se naziva "*beli šum*".Članovi te sekvence nisu medjusobno korelisani. Ona se propušta kroz ARMA model (filter) i na izlazu se dobija željena vremenska serija.

Uvedimo polinome:

$$\Theta(B) = (1 + \Theta_1 B + \Theta_2 B^2 + \cdots + \Theta_p B^p) \tag{18}$$

$$\Phi(B) = (1 + \Phi_1 B + \Phi_2 B^2 + \cdots + \Phi_q B^q) \tag{19}$$

ARMA reprezentacija sekvense X_t je

$$\Theta(B)\, X_t = \Phi(B)\, e_t \tag{20}$$

gde je e_t beli šum.

Relacija (20) predstavlja nehomogenu linearnu diferencnu jednačinu reda p. Ako su keoficijenti $\Theta_i = 0 \;\; (i = 1, 2, \ldots p)$, model se svodi na MA model reda q

$$X_t = \sum_{i=0}^{q} \Phi_i\, e_{t-i} \tag{21}$$

Ako su koeficijenti $\Phi_i = 0 \;\; (i = 1, 2, \ldots q)$, model se svodi na AR model reda p

$$X_t = \sum_{i=1}^{p} \Theta_i\, X_{t-i} + e_t \tag{22}$$